第六节 定积分的几何应用

一、微元法基本思想

二、平面图形的面积

三、体积

四、平面曲线的弧长

一、微元法的基本思想

1、什么问题可以用定积分解决？

1) 所求量 U 是与区间$[a\,,b]$上的某函数 $f(x)$ 有关的一个整体量；

2) U 对区间 $[a\,,b]$ 具有**可加性**，即可通过

“大化小, 常代变, 近似和, 取极限”

表示为 $U=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

定积分定义 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

2 、如何应用定积分解决问题 ?

第一步 利用“化整为零 , 以常代变” 求出局部量的近似值 ——— 微分表达式

$$\mathrm{d}U = f(x)\,\mathrm{d}x$$

第二步 利用“ 积零为整 , 无限累加 ” 求出整体量的精确值 ——— 积分表达式

$$U = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

这种分析方法成为**元素法** (或**微元分析法**)

元素的几何形状常取为: 条, 带, 段, 环, 扇, 片, 壳 等

3. 应用微元法的一般步骤：

(1) 根据具体问题，选取一个变量x为积分变量，

并确定它的变化区间$[a, b]$；

(2) 在 $[a, b]$上，任取一小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$；

求出$\mathrm{d}A = f(x)\mathrm{d}x$

(3) 所求量 $A = \int_a^b \mathrm{d}A = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

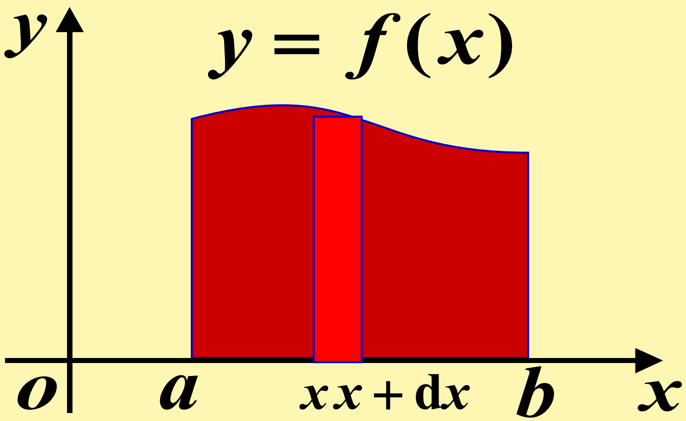
应用方向：

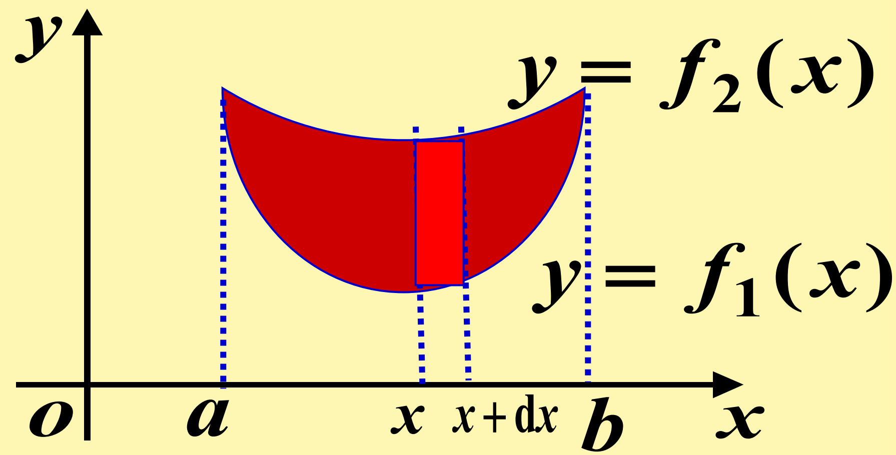
平面图形的面积；体积；平面曲线的弧长；

功；水压力；引力等.

二、平面图形的面积

1. 直角坐标情形





$$\mathrm{d}A = |f(x)|\mathrm{d}x$$

曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}A = |f_2(x) - f_1(x)|\mathrm{d}x$$

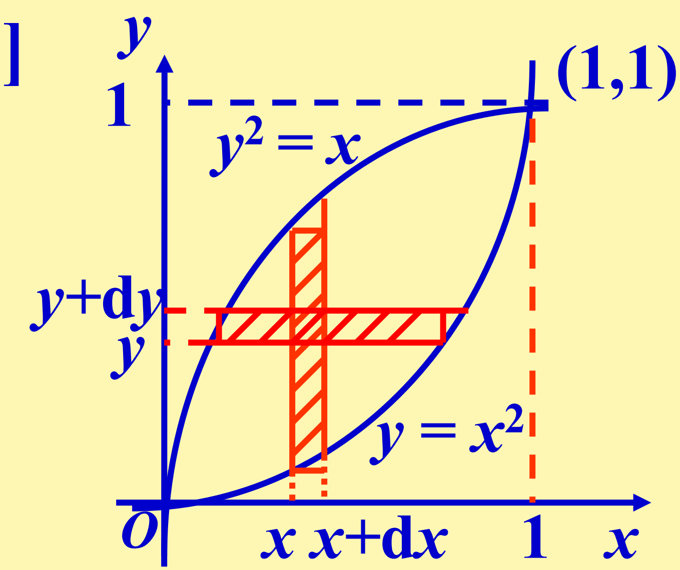
曲边梯形的面积

$$A = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|\mathrm{d}x$$

例1. 计算两条抛物线$y=x^2$，$y^2=x$所围图形的面积。

解法一：由 $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x^2 \end{cases}$ 得交点$(0,0)$, $(1,1)$

取 x 为积分变量, 变化范围为$[0,1]$



得面积元素 $dA=(\sqrt{x}-x^2)dx$

于是$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx$

$$=[\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{1}{3}$$

解法二：

取y为积分变量, 变化范围为$[0,1]$ $dA=(\sqrt{y}-y^2)dy$

于是$A=\int_0^1(\sqrt{y}-y^2)dy=\frac{1}{3}$

例2. 求$y=\sin x$, $y=\sin 2x$ $(0\le x\le\pi)$所围图形的面积。

解：由$\begin{cases} y=\sin x \\ y=\sin 2x \end{cases}$ 得交点$(0,0)$, $(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\pi,0)$

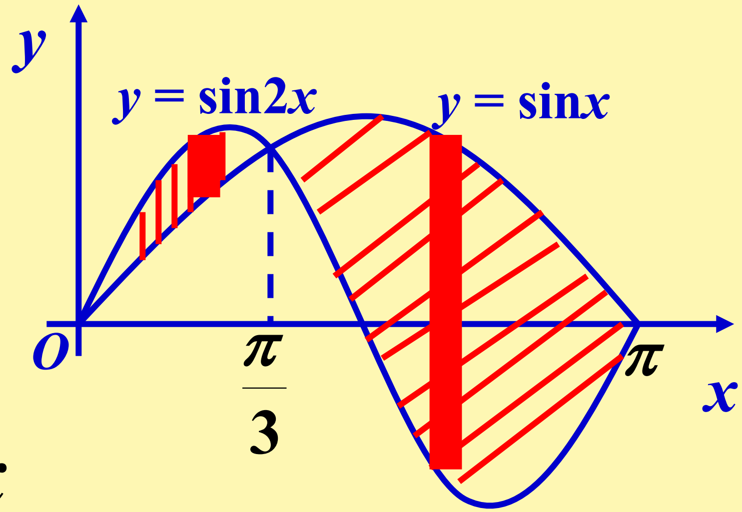
选x作积分变量，则x的取值范围是$[0,\pi]$

在$[0,\frac{\pi}{3}]$上，

$$A_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)\mathrm{d}x$$

在$[\frac{\pi}{3},\pi]$上，

$$A_2=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)\mathrm{d}x$$



则$A=A_1+A_2=\frac{5}{2}$

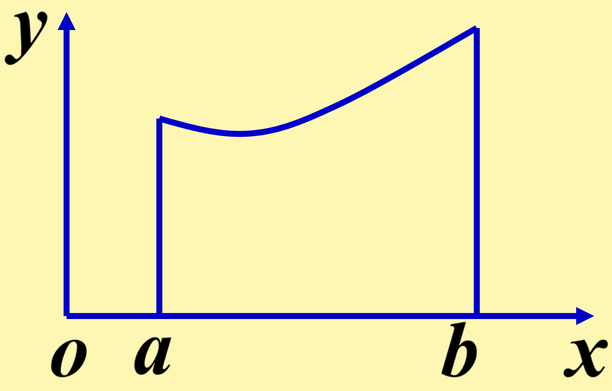
$$A=\int_a^b\left|f_2(x)-f_1(x)\right|\mathrm{d}x$$

$\left|f_2(x)-f_1(x)\right|$是分段函数

2. 参数表示的情形

曲线由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 给出，$\alpha \le t \le \beta$

且$\varphi(t),\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续导数，$\varphi'(t)>0$,



$$a=\varphi(\alpha),\ b=\varphi(\beta)$$

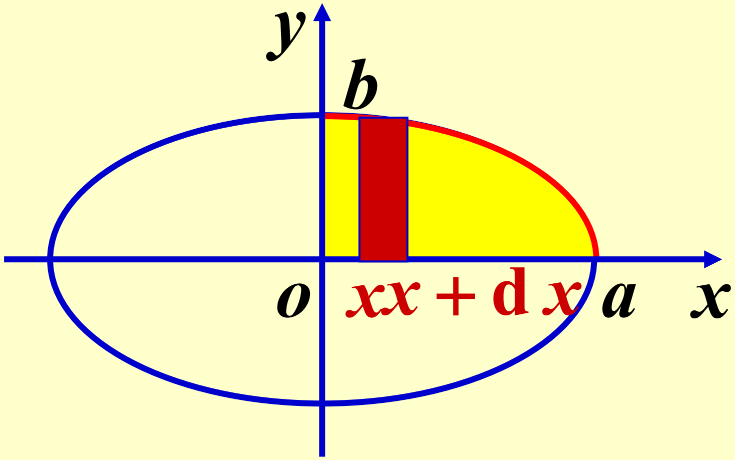
则曲边梯形面积

$$A=\int_a^b |y|\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta |\psi(t)|\cdot\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

对于$\varphi'(t)<0$,或 $\psi'(t)\neq 0$的情形也可仿照讨论

例3. 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积 .

解: 利用对称性 , 有 $\mathrm{d}A = y\,\mathrm{d}x$



$$A = 4\int_0^a y\,\mathrm{d}x$$

利用椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

$x:\ 0 \to a$ 对应 $t:\ \dfrac{\pi}{2} \to 0$ 应用定积分换元法得

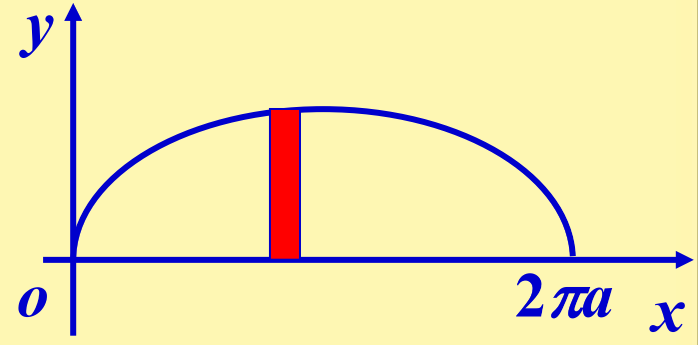
$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,\mathrm{d}t = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= 4ab\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \pi ab$$

当 $a = b$ 时得圆面积公式

例4. 求由摆线 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)(0\le t\le 2\pi)$ 的一拱与 x 轴所围平面图形的面积。

解: $A=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}\,t$



$=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}\,t$

$=4a^2\int_0^{2\pi}\sin^4\frac{t}{2}\,\mathrm{d}\,t$

$=8a^2\int_0^{\pi}\sin^4 u\,\mathrm{d}\,u$ （令 $u=\frac{t}{2}$）

$=16a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 u\,\mathrm{d}\,u=16a^2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=3\pi a^2$

习题结论

3. 极坐标的情形

设曲线的极坐标方程$\rho=\rho(\theta)$, $\rho(\theta)\in C[\alpha,\beta]$,

$\rho(\theta)\geq 0$，求由曲线$\rho=\rho(\theta)$及射线$\theta=\alpha,\theta=\beta$

围成的曲边扇形的面积 .

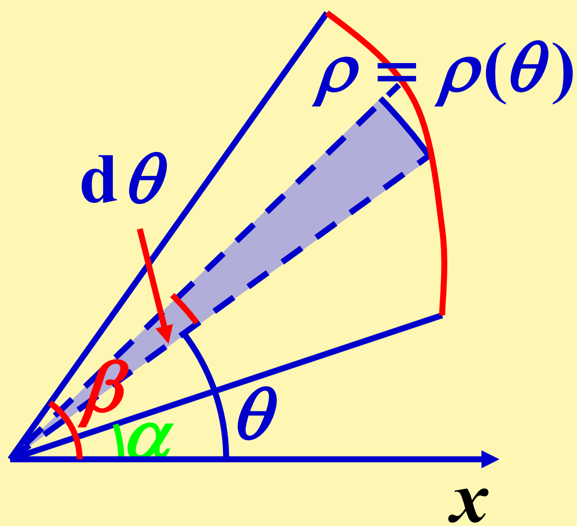
在区间$[\alpha,\beta]$上任取小区间$[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$

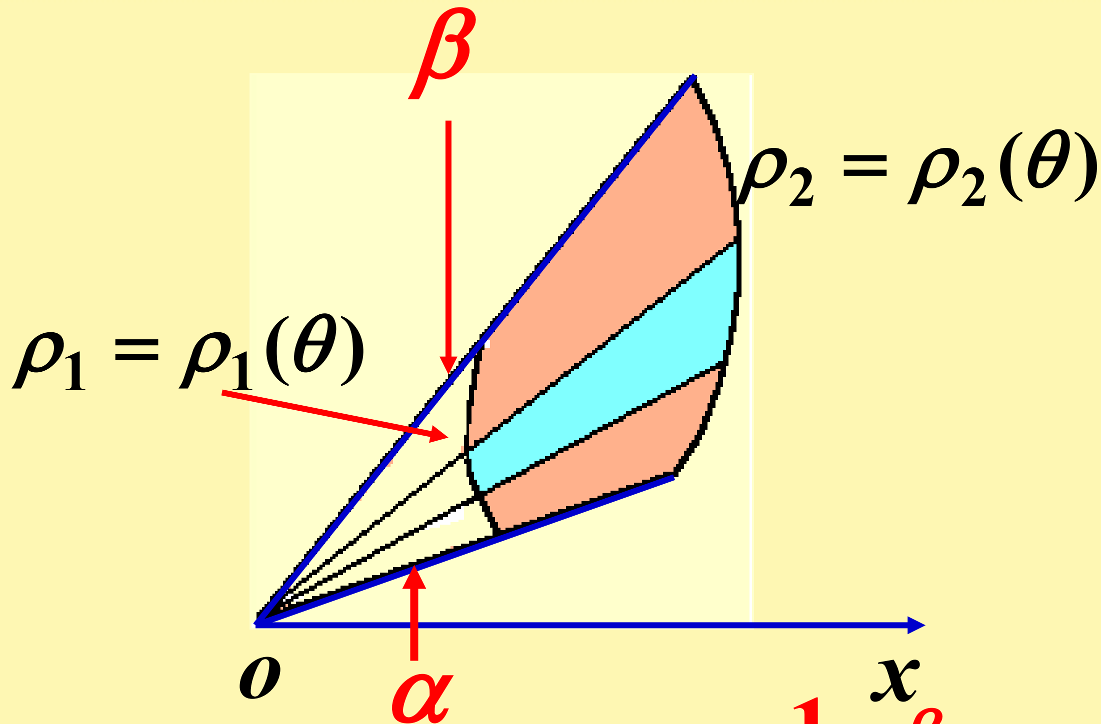
则对应该小区间上曲边扇形面积的近似值为

$$\mathrm{d}A=\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$

所求曲边扇形的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,\mathrm{d}\theta$$





$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [\rho_2^2 - \rho_1^2]\,\mathrm{d}\theta$$

几种常用曲线的图形:

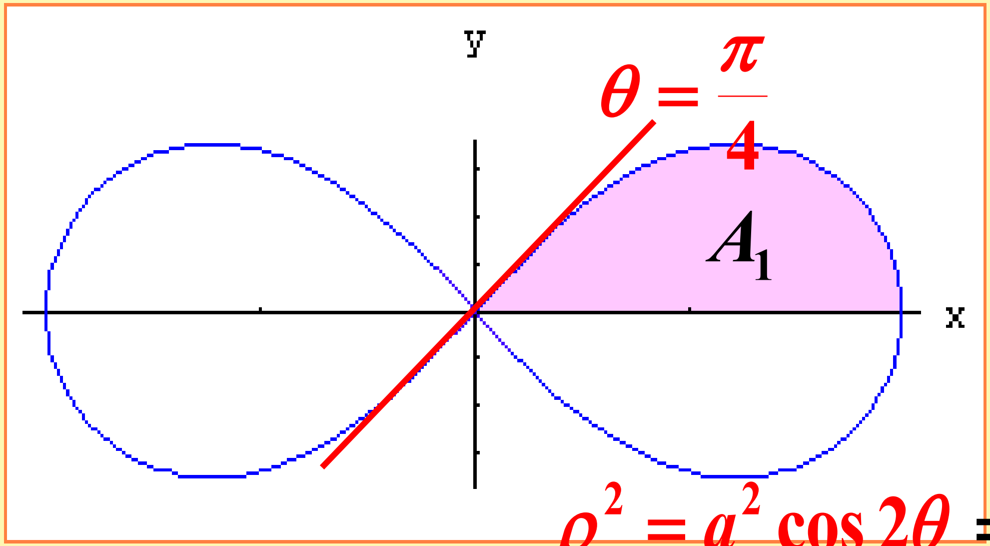
参见《高等数学同步学习指导》附录

南京邮电大学高等数学教学中心编

例5. 求伯努力双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围图形面积 .

解: 由对称性知总面积=4倍第一象限部分面积

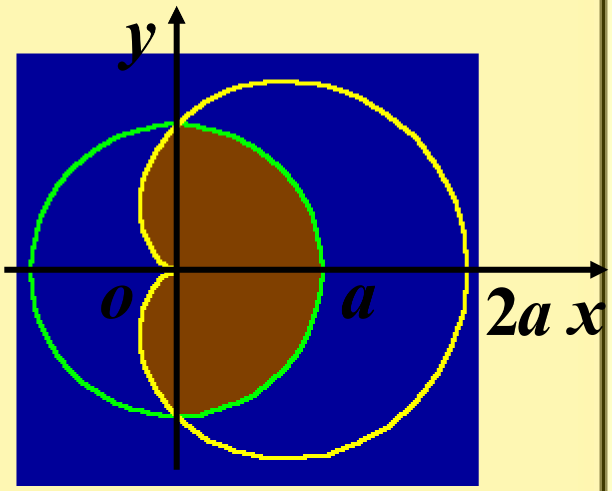
$$A = 4A_1 = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = a^2$$



$\rho^2 = a^2\cos 2\theta = 0$

例6. 计算心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 与圆 $\rho = a$

所围图形的面积。



解: 利用对称性，所求面积

$$A = \frac{1}{2}\pi a^2 + 2\times\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a^2\,\underline{(1+\cos\theta)^2}\,d\theta$$

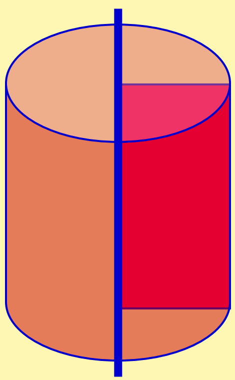
$$= \frac{1}{2}\pi a^2 + a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$= \cdots = \frac{5}{4}\pi a^2 - 2a^2$$

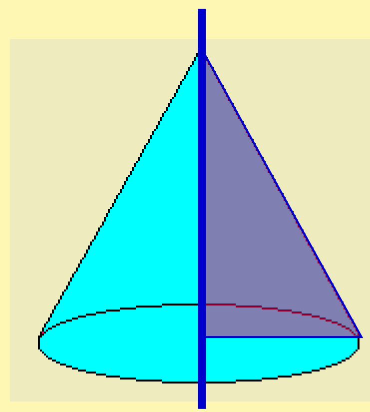
三、体积

1. 旋转体的体积

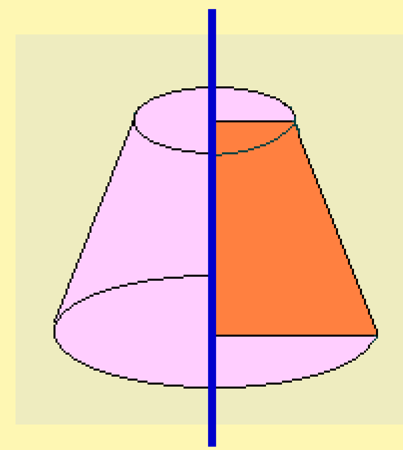
旋转体就是由一个平面图形绕这平面内一条直线旋转一周而成的立体。这直线叫做旋转轴。



圆柱



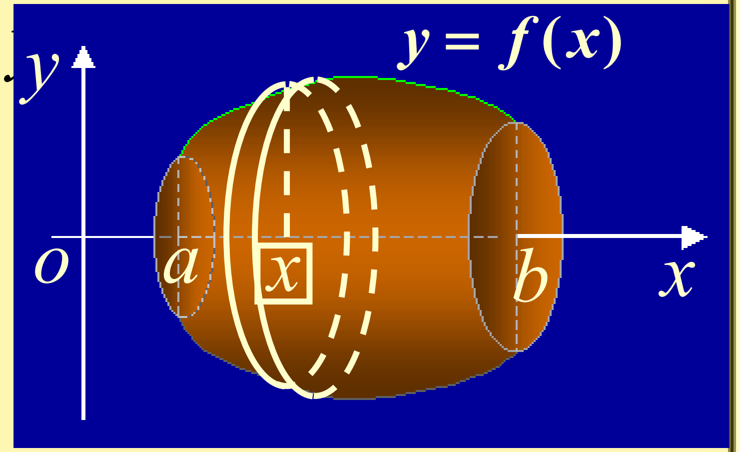
圆锥



圆台

考虑连续曲线段 $y = f(x)(a \le x \le b)$ 绕x轴旋转一周围成的立体体积，

取 x 作积分变量，$x \in [a,b]$



在$[a, b]$上任取小区间$[x, x+\mathrm{d}x]$

薄片的体积元素为

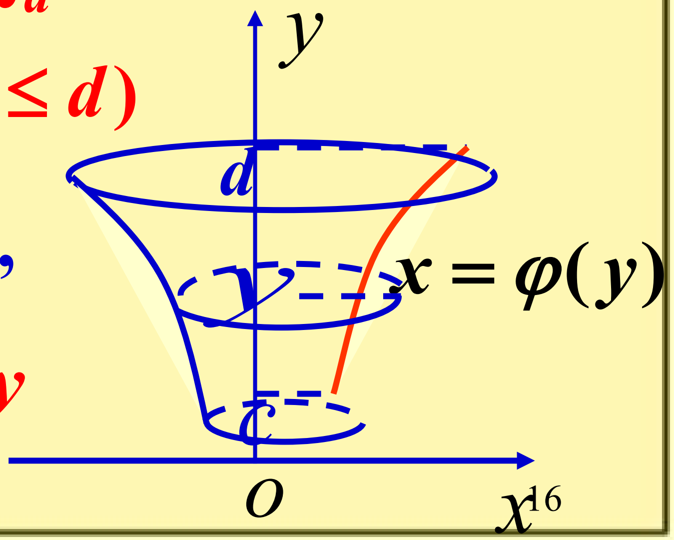
$$\mathrm{d}V_x = \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

旋转体的体积为 $V_x = \int_a^b \pi y^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$

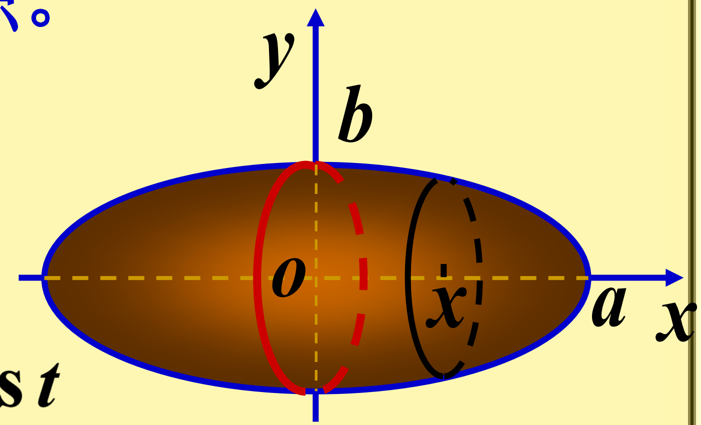
当考虑连续曲线段 $x = \varphi(y)\ \ (c \le y \le d)$

绕 y 轴旋转一周围成的立体体积时，

有 $V = \int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 \mathrm{d}y = \int_c^d \pi x^2 \mathrm{d}y$



例7. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形分别绕 x 轴、y 轴旋转而生成立体的体积。



解：绕x轴旋转时，

$$V_x=2\int_0^a \pi\, y^2\,\mathrm{d}x$$

椭圆参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$

(利用对称性)

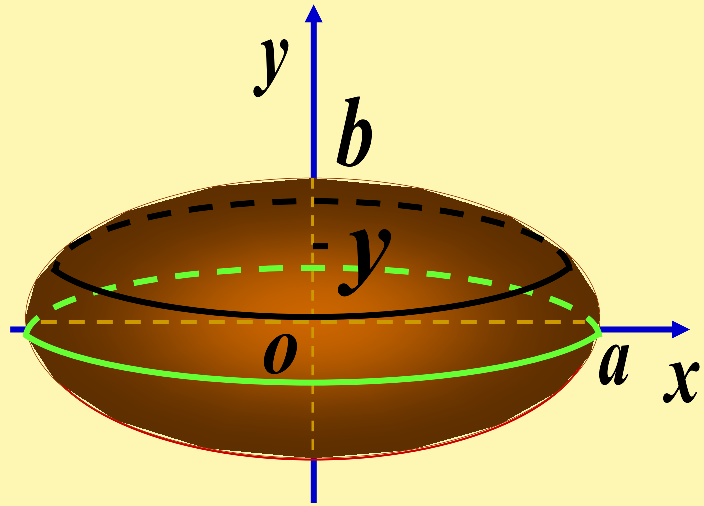
$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab^2\sin^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi ab^2\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

特别当$b=a$ 时，就得半径为a 的球体的体积 $\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

例7. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形分别绕 x 轴、y 轴旋转而生成立体的体积。

绕 y 轴旋转时，



$$V_y=2\int_0^b \pi x^2\,\mathrm{d}y$$

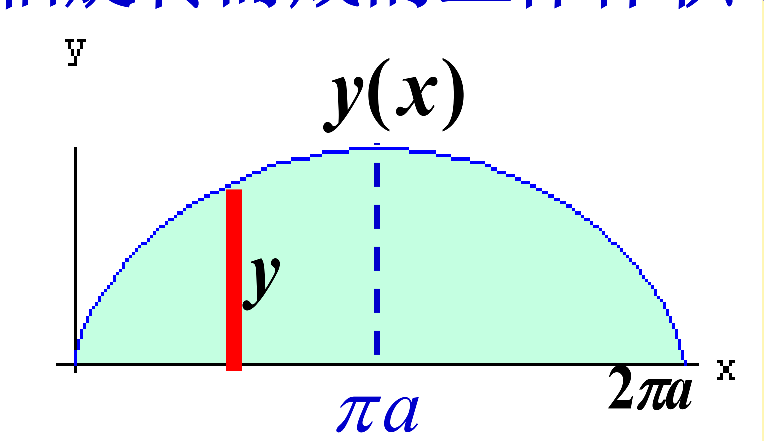
椭圆参数方程 $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 b\cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi a^2 b\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}\pi a^2 b$$

(利用对称性)

例8. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 的一拱与 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴，y 轴旋转而成的立体体积 .



解: 绕x轴旋转的旋转体体积

$$V_x = \int_0^{2\pi a} \pi y^2 \, \mathrm{d}x$$

$$= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

利用对称性

$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi} (1-\cos t)^3 \, \mathrm{d}t$$

$$= \cdots$$

$$= 5\pi^2 a^3$$

绕y轴旋转的旋转体体积

可看作平面图$OABC$与OBC分别绕y轴旋转构成旋转体的体积之差

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \quad (a>0)$$

A对应$t=2\pi$

B对应$t=\pi$

O对应$t=0$

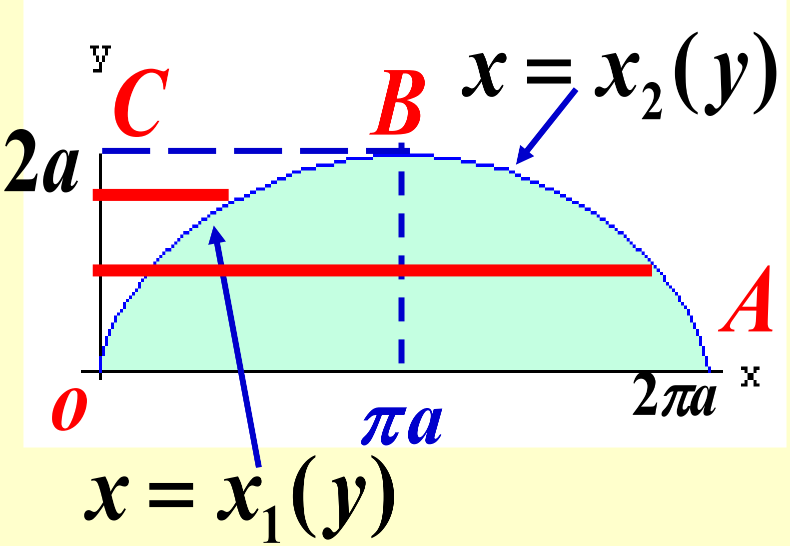
$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)\mathrm{d}y - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)\mathrm{d}y$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$- \pi \int_{0}^{\pi} a^2(t-\sin t)^2 \cdot a\sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\pi a^3 \int_0^{2\pi} (t-\sin t)^2 \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi^3 a^3$$



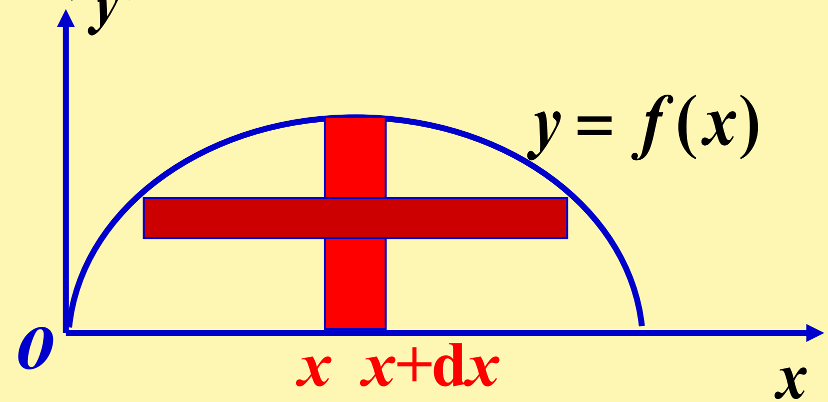
注意上下限！

例9. 证明 由平面图形$0 \le a \le x \le b$，$0 \le y \le f(x)$绕y轴旋转所成的旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$

证明: 圆桶薄壁型体积元素

$$\mathrm{d}V = 2\pi x f(x) \mathrm{d}x$$

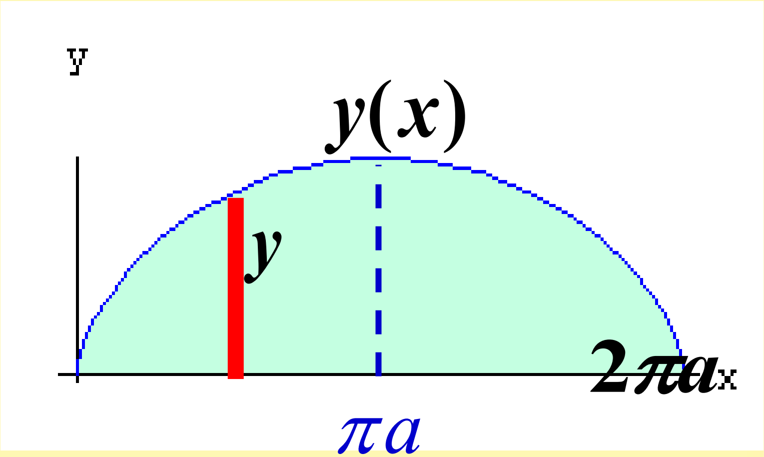


$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x) \mathrm{d}x$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| \mathrm{d}x$$ (不要求$0 \le y \le f(x)$时)

例8. 计算摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ $(a>0)$ 的一拱与 $y=0$ 所围成的图形绕 y 轴旋转而成的立体体积 .

解法二:



绕 y 轴旋转的旋转体体积

$$V_y = \int_0^{2\pi a} 2\pi x\, y\, \mathrm{d}x$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t-\sin t)\cdot a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

$$= 2\pi a^3 \left[\int_0^{2\pi} t\cdot(1-\cos t)^2\,dt - \int_0^{2\pi} \sin t(1-\cos t)^2\,dt \right]$$

$$= \cdots = 6\pi^3 a^3$$

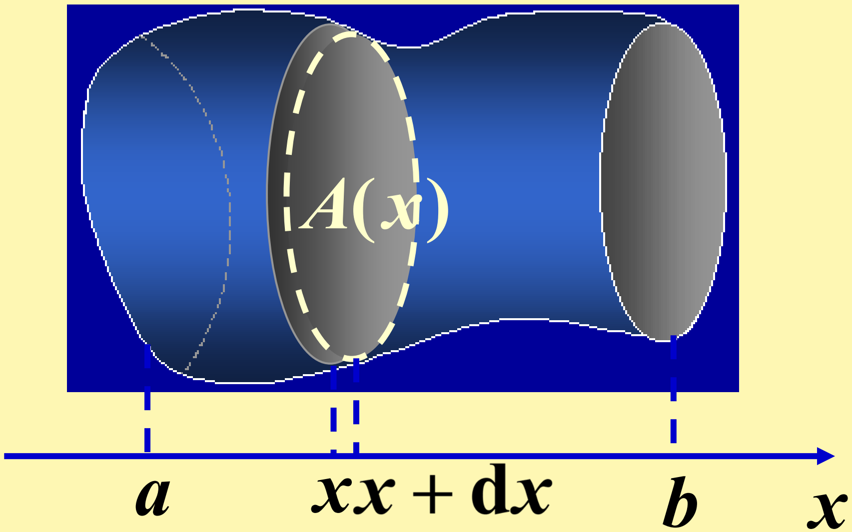
2. 平行截面已知的立体体积

设所给立体垂直于x 轴的截面面积为$A(x)$, $A(x)$在$[a,b]$上连续, 则对应于小区间 $[x, x+\mathrm{d}x]$ 的体积元素为

$$\mathrm{d}V = A(x)\,\mathrm{d}x$$

因此所求立体体积为

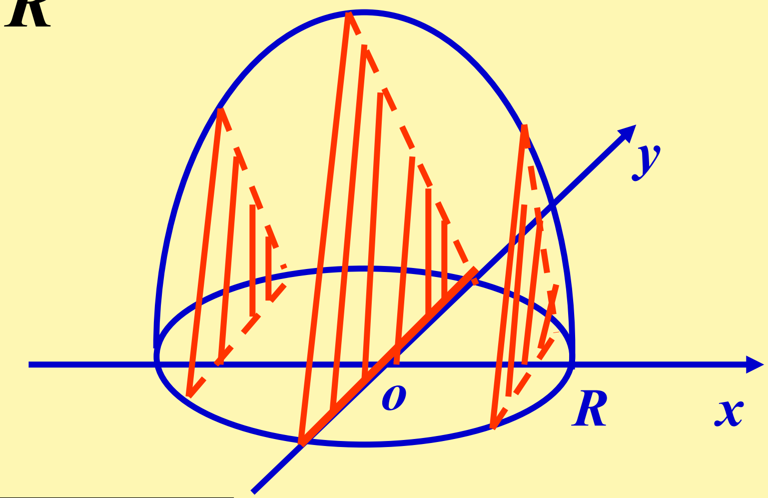
$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



例 10. 计算底面是半径为R的圆，而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积。

解： 底圆方程为 $x^2+y^2=R^2$

截面是等边三角形



从而边长为$2\sqrt{R^2-x^2}$,

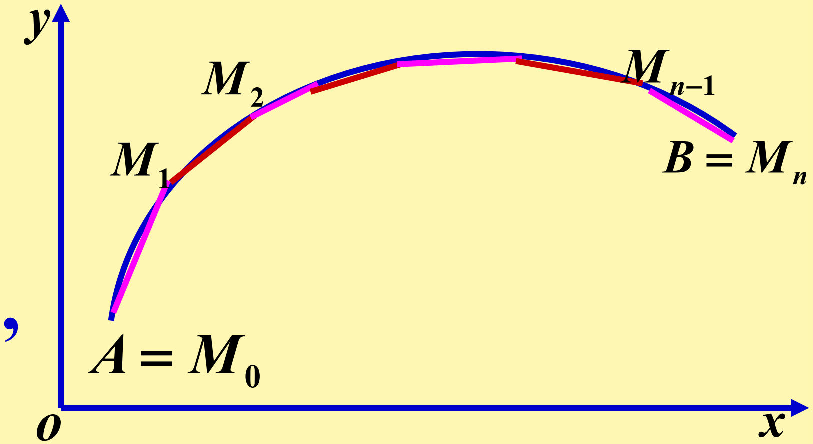
高为$\sqrt{3}\sqrt{R^2-x^2}$ 截面面积

$$A(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{3}\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{3}(R^2-x^2)$$

于是$V=2\int_0^R\sqrt{3}(R^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\sqrt{3}R^3$

四、平面曲线的弧长

定义: 若在弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上任意作内接折线，当折线段的最大边长 $\lambda \to 0$ 时，折线的总长度趋向于一个确定的极限，称此极限为曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的弧长，



即 $$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \left| M_{i-1} M_i \right|$$

并称此曲线弧为可求长的。

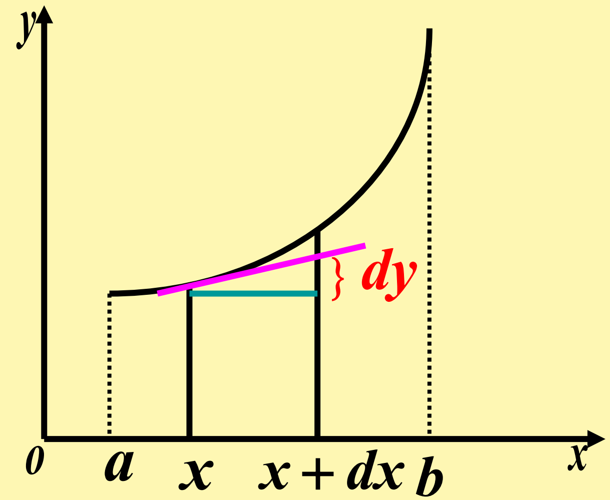
定理: 任意<u>光滑曲线弧</u>都是可求长的。

(具有连续导数)

利用微元法来讨论平面光滑曲线弧长的计算公式

1 直角坐标方程的曲线弧长公式

设曲线弧为 $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有一阶连续导数



取积分变量为 x，在 $[a,b]$ 上任取小区间 $[x, x+dx]$，

以对应小切线段的长代替小弧段的长

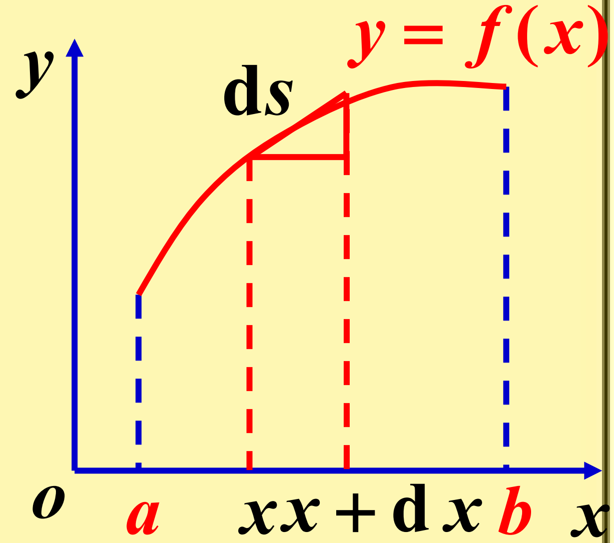
小切线段的长 $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

弧长元素 $ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

弧长 $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$

1.直角坐标方程的曲线弧长公式

曲线弧方程 $y=f(x)(a\le x\le b)$



弧长元素： $\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$

$$=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

弧长公式 $s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

2.参数方程的曲线弧长公式

曲线弧方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ （$\alpha\le t\le\beta$）

弧长元素： $\mathrm{d}s=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

弧长公式 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$

3.极坐标方程的曲线弧长公式

曲线弧方程 $\rho = \rho(\theta)$ （$\alpha \le \theta \le \beta$）

直角坐标与极坐标关系

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

$$\therefore ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta)}d\theta,$$

$$= \sqrt{(\rho'\cos\theta - \rho\sin\theta)^2 + (\rho'\sin\theta + \rho\cos\theta)^2}d\theta,$$

$$= \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta,$$

3.极坐标方程的曲线弧长公式

曲线弧方程 $\rho = \rho(\theta)$ （$\alpha \le \theta \le \beta$）

直角坐标与极坐标关系

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad (\alpha \le \theta \le \beta)$$

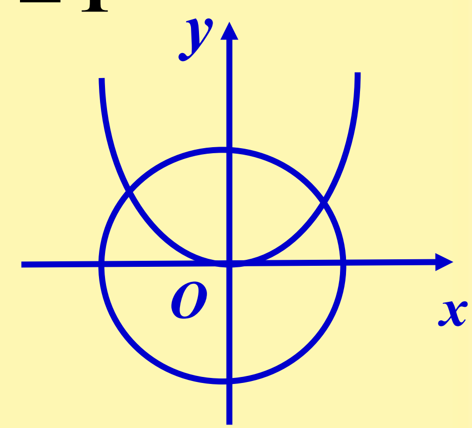
弧长元素：$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

弧长公式 $s = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$

注意: 求弧长时积分上下限必须上大下小。

例11. 求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 被圆 $x^2+y^2=3$ 所截下的有限部分的弧长。

解: 由$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ x^2+y^2=3 \end{cases}$ 得$\begin{cases} x_1=\sqrt{2} \\ y_1=1 \end{cases}$,$\begin{cases} x_2=-\sqrt{2} \\ y_2=1 \end{cases}$



由对称性$s=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=[x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

例12.求心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$ 的长度.

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

解： $\rho = a(1+\cos\theta),\ \rho'(\theta) = -a\sin\theta$

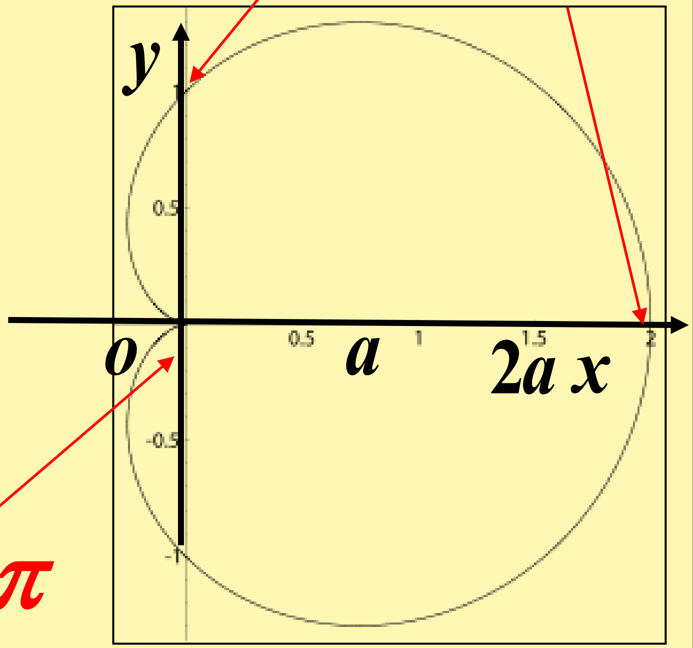
由对称性：

$$s=2\int_0^{\pi} a\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2a\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 8a$$

$\theta=\frac{\pi}{2}$ $\theta=0$



$\theta=\pi$